UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Examen Calificación (Parte I)
Doctorado en ciencias mención matemática

Nota. Cada pregunta es de desarrollo, justifique todos los pasos en su desarrollo.

1. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una transformación lineal, representada en base canónica por la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Sea $N = \text{Nuc}(f^2 + \text{Id})$. Determine una base para N. Decida si N es invariante por f.
   (b) Escriba f^{-1} como combinación lineal de potencias de f.
   (c) Estudiar la diagonalización de la matriz A sobre los reales y sobre los complejos.
   (d) Determine la forma reducida de Jordan J de f.
   (e) Encontrar una base de Jordan de f y escribir la relación que hay entre A y J.

2. (a) Sea G un grupo y H un subgrupo de G tal que $[G : H] = n$. Pruebe que la acción de G en las clases laterales izquierdas de H en G induce un homomorfismo Φ de G en el grupo simétrico S_n. Determine el $\ker(\Phi)$.
   (b) Sea G un grupo simple y $|G| = 60$.
      i. Demostrar que $|H| \leq 12$ para todo subgrupo propio de G.
      ii. Para $p = 3$ y $p = 5$, determinar cuántos p-subgrupos de Sylow tiene G.
      iii. ¿Es el grupo G isomorfo al grupo A_5 ?

3. Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y acotado. Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se llama **absolutamente continua** en $[a, b]$ si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualquiera colección finita disjunta $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n$ de subintervalos abiertos de (a, b)
$$\text{si } \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta \text{ entonces } \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon.$$
   (a) Demuestre que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es Lipschitz, entonces f es absolutamente continua en $[a, b]$.
   (b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua que es absolutamente continua en $[\epsilon, 1]$ para cualquier $0 < \epsilon < 1$. Demuestre que f es absolutamente continua en $[0, 1]$ si f es creciente.
   (c) Sea f una función real definida por $f(x) = \sqrt{x}$. ¿ Es la función f absolutamente continua en $[0, 1]$? ¿Es la función f Lipschitz en $[0, 1]$?

4. Sea X un espacio topológico no vacío.

   (a) Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes.

      i. La intersección de dos conjuntos abiertos cualquiera de X es no vacía.

      ii. Todo conjunto abierto no vacío de X es denso en todas partes.

      iii. Todo conjunto abierto de X es conexo.

      Un espacio X que cumple una de estas condiciones se llama **irreducible**.

   (b) Demuestre que si X es Hausdorff y $A \subset X$ es irreducible, entonces A es un punto.

5. Sea G un grupo finito, V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ y $f : G \to GL(V)$ un homomorfismo de grupos.

   (a) Demostrar que V admite un producto interno con respecto al cual todas las matrices $f(g)$, son ortogonales, donde $g \in G$.

   (b) Suponga que $\dim(V) = 2$. Demostrar que $[G, G] \neq G$, donde $[G, G]$ es el subgrupo conmutador de G.